

Esercizio 1

Procedendo per tentativi, proviamo con $\Theta(n \log n)$. È facile vedere che la ricorrenza è $\Omega(n \log n)$, per via della sua componente non ricorsiva. Proviamo quindi a dimostrare che $T(n) = O(n \log n)$.

- Caso base: $T(1) = 1 \leq c \cdot 1 \log 1 = 0$, è falso. Dobbiamo quindi calcolare altri case base:

$$T(2) = T(1) + T(0) + 2 \log 2 = 1 + 1 + 2 \log 2 = 4 \leq c \cdot 2 \log 2 \Rightarrow c \geq 2 = c_2$$

$$T(3) = T(1) + T(1) + 3 \log 3 = 1 + 1 + 3 \log 3 \leq c \cdot 3 \log 3 \Rightarrow c \geq 1 + \frac{2}{3 \log 3} = c_3$$

$$T(4) = T(2) + T(1) + 4 \log 4 = 4 + 1 + 4 \log 4 \leq c \cdot 4 \log 4 \Rightarrow 1 + \frac{5}{4 \log 4} = c_4$$

$$T(5) = T(2) + T(1) + 5 \log 5 = 4 + 1 + 5 \log 5 \leq c \cdot 5 \log 5 \Rightarrow c \geq 1 + \frac{5}{5 \log 5} = c_5$$

Tutti i casi precedenti fanno riferimento a $T(1)$, che non è stato possibile dimostrare. Abbiamo quindi dovuto dimostrarli uno ad uno. Poiché $T(6)$ è pari a $T(3) + T(2) + 6 \log 6$, è espresso tramite casi base già dimostrati ($T(2)$ e $T(3)$) e possiamo utilizzare l'induzione per andare avanti. È facile vedere (senza calcolatrice!) che c_2, c_3, c_4, c_5 sono inferiori o uguali a 2, quindi $c \geq 2$ rispetta tutte le disequazioni sopra.

- Ipotesi induttiva: $T(k) \leq ck \log k$, per $2 \leq k < n$
- Passo induttivo:

$$\begin{aligned} T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lfloor n/3 \rfloor) + n \log n \\ &\leq c \lfloor n/2 \rfloor \log \lfloor n/2 \rfloor + c \lfloor n/3 \rfloor \log \lfloor n/3 \rfloor + n \log n \\ &\leq c^{n/2} \log^{n/2} + c^{n/3} \log^{n/3} + n \log n \\ &\leq c^{n/2} \log n + c^{n/3} \log n + n \log n \\ &\leq 5/6cn \log n + n \log n \leq cn \log n \end{aligned}$$

L'ultima disequazione è rispettata per $c \geq 6$.

Abbiamo quindi dimostrato che $T(n) = O(n \log n)$, per $c \geq 6$ e $m = 2$.

Esercizio 2

È possibile visitare l'intero albero, con una visita in profondità, e restituire il numero di elementi che sono compresi fra i due limiti:

```

int occurrences(TREE T, int min, int max)


---


if T = nil then
  | return 0
int nl = occurrences(T.left, min, max)
int nr = occurrences(T.right, min, max)
return nl + nr + iif(min ≤ T.key ≤ max, 1, 0)


---


    
```

Questo algoritmo ha costo $\Theta(n)$, qualunque siano i valori cercati. Non è molto efficiente quando l'intervallo è molto ristretto.

Per rendere più efficiente questo algoritmo, è sufficiente notare che:

- Se stiamo visitando un nodo in cui la chiave è minore o uguale a min è possibile che ci siano valori compresi fra min e max nel sottoalbero destro, ma sicuramente non nel sottoalbero sinistro. Quindi applicheremo ricorsivamente la funzione al sottoalbero destro.

- Altrimenti, se stiamo visitando un nodo in cui la chiave è maggiore o uguale a max , è possibile che ci siano valori compresi fra min e max nel sottoalbero sinistro, ma sicuramente non nel sottoalbero destro. Quindi applicheremo ricorsivamente la funzione al sottoalbero sinistro.
- Altrimenti, possono essere presenti nodi compresi nell'intervallo sia nel sottoalbero sinistro che in quello destro, e chiameremo la nostra funzione in entrambi.

Ai nodi contati in questo modo, aggiungeremo il nodo stesso se è compreso fra min e max .

```

int occurrences(TREE  $T$ , int  $min$ , int  $max$ )


---


if  $T = \text{nil}$  then
  | return 0
int  $tot = \text{iif}(min \leq T.key \leq max, 1, 0)$ 
if  $T.key < min$  then
  |  $tot = tot + \text{occurrences}(T.right, min, max)$ 
else if  $T.key > max$  then
  |  $tot = tot + \text{occurrences}(T.left, min, max)$ 
else
  |  $tot = tot + \text{occurrences}(T.right, min, max) + \text{occurrences}(T.left, min, max)$ 
return  $tot$ 

```

La complessità di questo algoritmo dipende da n , dalla dimensione dell'intervallo e dalla struttura dell'albero. Se l'intervallo comprende tutti i nodi, il costo dell'algoritmo è comunque $O(n)$. Anche quando l'intervallo è piccolo (al limite contenente un solo elemento), è possibile progettare un albero che viene interamente visitato dall'algoritmo, con costo $\Theta(n)$. Ideare tale albero è lasciato per esercizio. Tuttavia, per alberi completi e con intervalli che racchiudono un numero di nodi $k \ll n$, il costo è $O(\log n + k)$.

Esercizio 3

Se si considerano le celle come nodi di un grafo non orientato e le coppie di celle adiacenti come archi, il problema da risolvere corrisponde ad identificare la componente connessa più grande.

È possibile e accettabile costruire un grafo a partire dalla matrice, applicando poi l'algoritmo per le componenti connesse. Tuttavia, è più semplice adattare la struttura dalla funzione $cc()$, ovvero facendo partire una DFS da ogni cella contenente alberi che non sia già stato visitato in precedenza.

Per ridurre la quantità di codice, andremo a modificare direttamente la matrice. Se ciò non fosse accettabile, è necessario aggiungere una funzione wrapper che copia la matrice in una matrice di appoggio.

Adotteremo queste convenzioni: una cella con valore 1 è un albero che deve ancora essere visitato; una cella con valore 0 o era un prato in origine oppure è già stato visitato.

La visita viene fatta in maniera ricorsiva, in profondità, dalla funzione $dfs()$, che ritorna il numero di nodi raggiunti dalla visita. Se le coordinate del nodo sono corrette e il nodo non è ancora stato visitato, viene marcato come visitato (direttamente sulla matrice) e viene contato come un nodo; vengono poi visitati ricorsivamente i quattro nodi adiacenti.

La complessità è $\Theta(n^2)$, in quanto l'algoritmo corrisponde ad una visita in profondità di un grafo con n^2 nodi e $4n^2 - 4n$ archi.

```
int searchForest(boolean[][] A, int n)
```

```
    maxsofar = 0
    for i = 1 to n do
        for j = 1 to n do
            if A[i, j] = 1 then
                maxsofar = max(maxsofar, dfs(A, i, j, n))
    return maxsofar
```

```
int dfs(boolean[][] A, int i, int j, int n)
```

```
    if 1 ≤ i ≤ n and 1 ≤ j ≤ n and A[i, j] = 1 then
        A[i, j] = 0
        return 1 + dfs(A, i - 1, j, n) + dfs(A, i, j - 1, n) + dfs(A, i + 1, j, n) + dfs(A, i, j + 1, n)
    else
        return 0
```

Esercizio 4

Il problema viene risolto con una ricerca binaria modificata. Si noti che l'algoritmo seguente utilizza indici dei vettori compresi fra 1 e n ; per indici compresi fra 0 e $n - 1$ bisogna scambiare pari con dispari nella descrizione seguente, e aggiustare i valori di conseguenza.

Si parte con l'osservazione che le coppie consecutive $A[i], A[i + 1]$ che si trovano *prima* del valore cercato sono tali per cui i è dispari, $i + 1$ è pari; le coppie che si trovano *dopo* il valore cercato sono tali per cui i è pari, $i + 1$ è dispari.

Quindi, supponendo di esaminare ricorsivamente il sottovettore $A[i \dots j]$ e di avere almeno tre elementi contenuti in esso, si calcola l'elemento mediano $m = (i + j)/2$. Ci sono quattro casi: a seconda se m sia pari o dispari, e a seconda che sia uguale all'elemento successivo o precedente. In tutti i casi, si esamina un sottovettore grande al più la metà.

Se invece il sottovettore $A[i \dots j]$ ha dimensione 1, allora contiene l'elemento cercato e si può restituire tale valore.

```
int single(ITEM[] A, int n)
```

```
    return singleRec(A, 1, n)
```

```

int singleRec(ITEM[] A, int i, int j)


---


if  $i = j$  then
  | return A[i]
int  $m = \lfloor (i + j) / 2 \rfloor$ 
if  $m \bmod 2 = 1$  then
  | if  $A[m] = A[m + 1]$  then
  | | return singleRec(A,  $m + 2$ , j)
  | else
  | | return singleRec(A, i, m)
else
  | if  $A[m - 1] = A[m]$  then
  | | return singleRec(A,  $m + 1$ , j)
  | else
  | | return singleRec(A, i,  $m - 1$ )

```

La complessità è pari a $O(\log n)$, essendo una ricerca dicotomica. binaria.